

Recasages possibles : 153, 157, 158.

Référence : Analyse matricielle, ROMBALDI (p. 96-102)

Développement

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, et pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note $R_u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$

Théorème 1 (Courant-Fischer) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint dont on ordonne les valeurs propres $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_n(u)$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons \mathcal{F}_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k . Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lambda_k(u) = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) \right) = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) \right).$$

Corollaire 2 (Inégalités de Weyl) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k(u) + \lambda_1(v) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_k(u) + \lambda_n(v).$$

En particulier, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $\lambda_k : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

- *Preuve du Théorème 1* : Remarquons tout d'abord que R_u est à valeurs réelles. En effet, par le caractère hermitien du produit scalaire, et le fait que u est auto-adjoint, on a pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle = \langle u(x), x \rangle$. Ainsi $\langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ puis $R_u(x) \in \mathbb{R}$. Il fait donc sens de considérer des bornes supérieures ou inférieures de parties du type $\{R_u(x)\}_{x \in F \setminus \{0\}}$ pour un certain sous-espace F . De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors

$$R_u(\lambda x) = \frac{\langle u(\lambda x), \lambda x \rangle}{\|\lambda x\|^2} = \frac{\langle \lambda u(x), \lambda x \rangle}{|\lambda|^2 \|x\|^2} = \frac{|\lambda|^2 \langle u(x), x \rangle}{|\lambda|^2 \|x\|^2} = R_u(x).$$

Autrement dit, R_u est constant sur les droites vectorielles. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de E , en notant $\mathbb{S} = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité, alors

$$\sup_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) = \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (R_u(x)).$$

En effet, si $x \in F \setminus \{0\}$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S} \cap \text{Vect}(x)$. On a de la même manière

$$\inf_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) = \inf_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (R_u(x)).$$

Or, $F \cap \mathbb{S}$ étant compact (car F est fermé et \mathbb{S} est compact), ce sup et cet inf sont en fait respectivement un max et un min, ce qui justifie l'existence d'une partie des forces en présence dans l'énoncé. On note alors pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mu_k^- = \inf_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) \right) \quad \text{et} \quad \mu_k^+ = \sup_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} (R_u(x)) \right).$$

Comme u est auto-adjoint, on peut fixer grâce au théorème spectral une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres pour u , de sorte que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_j est un vecteur propre associé à $\lambda_j(u)$. Fixons également $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \mathcal{F}_k$ et $E'_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \in \mathcal{F}_{n-k+1}$. Soit $x \in E_k \setminus \{0\}$. Il existe par définitions $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$. Alors,

$$\langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k x_j u(e_j), \sum_{j=1}^k x_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k x_j \lambda_j(u) e_j, \sum_{j=1}^k x_j e_j \right\rangle.$$

Or, (e_1, \dots, e_k) est une base orthonormée de E_k donc $\langle u(x), x \rangle = \sum_{j=1}^k |x_j|^2 \lambda_j(u)$.

Enfin

$$\langle u(x), x \rangle \leq \lambda_k(u) \sum_{j=1}^k |x_j|^2 = \lambda_k(u) \|x\|^2, \quad \text{i.e.} \quad R_u(x) \leq \lambda_k(u).$$

Ceci étant valable pour tout $x \in E_k \setminus \{0\}$, on obtient $\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} (R_u(x)) \leq \lambda_k(u)$.

Par ailleurs, $e_k \in E_k$ vérifie $\|e_k\| = 1$, et donc $R_u(e_k) = \frac{\langle \lambda_k(u) e_k, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = \lambda_k(u)$. Ainsi on a montré que

$$\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} (R_u(x)) = \lambda_k(u) \quad \text{et donc} \quad \mu_k^- \leq \lambda_k(u).$$

De même, on montre que $\forall x \in E'_k \setminus \{0\}$, $R_u(x) \geq \lambda_k(u)$ mais à nouveau en utilisant $e_k \in E'_k$, on obtient

$$\min_{x \in E'_k \setminus \{0\}} (R_u(x)) = \lambda_k(u) \quad \text{et donc} \quad \lambda_k(u) \leq \mu_k^+.$$

Fixons un sous-espace vectoriel $F \in \mathcal{F}_k$. Comme $\dim(E'_k) = n - k + 1$, on a d'après la formule de Grassman, puisque $\dim(F + E'_k) \leq n$

$$\dim(F \cap E'_k) = k + n - k + 1 - \dim(F + E'_k) \geq 1.$$

En particulier, il existe des vecteurs non nuls dans $F \cap E'_k$. Soit y un tel élément. On a

$$\max_{F \setminus \{0\}} (R_u) \geq R_u(y) \geq \min_{E'_k \setminus \{0\}} (R_u) = \lambda_k(u).$$

Cette minoration étant indépendante de $F \in \mathcal{F}_k$, on a

$$\inf_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{F \setminus \{0\}} (R_u) \right) = \mu_k^- \geq \lambda_k(u).$$

On a donc montré les deux inégalités, soit $\mu_k^- = \lambda_k(u)$. De même, en remarquant que tout élément de \mathcal{F}_{n-k+1} intersecte non trivialement E_k , on obtient

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{F \setminus \{0\}} (R_u) \right) = \mu_k^+ \leq \lambda_k(u),$$

d'où l'égalité $\mu_k^+ = \lambda_k(u)$. Remarquons que la borne inférieure μ_k^- (resp. la borne supérieure μ_k^+) est atteinte pour le sous-espace $E_k \in \mathcal{F}_k$ (resp. $E'_k \in \mathcal{F}_{n-k+1}$), donc il s'agit bien d'un min (resp. d'un max) comme l'indique l'énoncé. Ceci achève la preuve du **Théorème 1** de Courant-Fischer.

- *Preuve du Corollaire 2* : On peut commencer par remarquer que le **Théorème 1** donne (pour $k = 1$ la deuxième égalité, puis pour $k = n$ la première)

$$\lambda_1(v) = \min_{E \setminus \{0\}} (R_v) \quad \text{et} \quad \lambda_n(v) = \max_{E \setminus \{0\}} (R_v).$$

Ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\lambda_1(v) \leq R_v(x) \leq \lambda_n(v)$, puis

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \lambda_1(v) + R_u(x) \leq R_v(x) + R_u(x) = R_{u+v}(x) \leq \lambda_n(v) + R_u(x).$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $F \in \mathcal{F}_k$. On a donc

$$\lambda_1(v) + \max_{F \setminus \{0\}} (R_u) \leq \max_{F \setminus \{0\}} (R_{u+v}) \leq \lambda_n(v) + \max_{F \setminus \{0\}} (R_u),$$

puis en passant à l'inf sur les $F \in \mathcal{F}_k$, d'après le **Théorème 1** :

$$\lambda_1(v) + \lambda_k(u) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_n(v) + \lambda_k(u),$$

ce qui montre les *inégalités de Weyl*. On considère alors l'application

$$\lambda_k : \begin{cases} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longmapsto \lambda_k(u) \end{cases}$$

dont on va montrer qu'elle est 1-lipschitzienne (et donc continue). D'après les inégalités de Weyl, on a

$$\lambda_1(v) \leq \lambda_k(u+v) - \lambda_k(u) \leq \lambda_n(v).$$

Or, par définition, si $\rho(v)$ désigne le rayon spectral de v , alors $-\rho(v) \leq \lambda_1(v)$ et $\lambda_n(v) \leq \rho(v)$. En effet, compte tenu de l'ordre entre les $\lambda_k(v)$, on a

$$\rho(v) = \max(|\lambda_1(v)|, |\lambda_n(v)|).$$

Ainsi,

$$\rho(v) \geq |\lambda_n(v)| \geq \lambda_n(v) \quad \text{et} \quad -\rho(v) \leq -|\lambda_1(v)| \leq \lambda_1(v).$$

Par conséquent, on a

$$-\rho(v) \leq \lambda_k(u+v) - \lambda_k(u) \leq \rho(v) \quad \text{i.e.} \quad |\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \rho(v).$$

Or, comme v est auto-adjoint, si on note $\|v\|_{\mathcal{L}(E)}$ sa norme subordonnée à la norme hermitienne de E , on a $\|v\| = \rho(v)$. Ainsi,

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \|v\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(u+v) - u\|_{\mathcal{L}(E)}.$$

On obtient bien que λ_k est 1-lipschitzienne donc continue, ce qui conclut la preuve du **Corollaire 2**.